Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 3

31 de octubre de 2023

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

8823 – 7123

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 24]

En esta pregunta le vamos a pedir que explore una serie de propiedades de la familia de curvas $y = x^3 + ax^2 + b$ donde $x \in \mathbb{R}$ y a, b son parámetros reales.

Considere la familia de curvas $y = x^3 + ax^2 + b$ para $x \in \mathbb{R}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$.

En primer lugar, considere el caso en el que $a = 3$ y $b \in \mathbb{R}$.

(a) Variando de manera sistemática el valor de b, o de cualquier otro modo alternativo, halle los dos valores de b para los que la curva $y = x^3 + 3x^2 + b$ tiene exactamente dos intersecciones con el eje x. [2]

(b) Escriba el conjunto de valores de b para los cuales la curva $y = x^3 + 3x^2 + b$ tiene exactamente:

(i) Una intersección con el eje x [1]

(ii) Tres intersecciones con el eje x [1]

Considere ahora el caso en el que $a = -3$ y $b \in \mathbb{R}$.

(c) Escriba el conjunto de valores de b para los cuales la curva $y = x^3 - 3x^2 + b$ tiene exactamente:

(i) Dos intersecciones con el eje x [1]

(ii) Una intersección con el eje x [1]

(iii) Tres intersecciones con el eje x [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Para los siguientes apartados de esta pregunta, considere la curva $y = x^3 + ax^2 + b$ para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$.

(d) Considere el caso en el que la curva tiene exactamente tres intersecciones con el eje x. Indique si cada uno de los puntos de pendiente cero está situado por encima o por debajo del eje x. [1]

(e) Muestre que la curva tiene un punto con pendiente cero en $\mathrm{P}(0\,,\,b)$ y un punto con pendiente cero en $\mathrm{Q}\left(-\frac{2}{3}a\,,\,\frac{4}{27}a^3+b\right)$. [5]

(f) Considere los puntos P y Q para $a > 0$ y $b > 0$.

(i) Halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ y, a partir de lo anterior, determine si cada uno de esos puntos es un máximo local o un mínimo local. [3]

(ii) Determine si cada uno de esos puntos está situado por encima o por debajo del eje x. [1]

(g) Considere los puntos P y Q para $a < 0$ y $b > 0$.

(i) Indique si P es un máximo local o un mínimo local y si está situado por encima o por debajo del eje x. [1]

(ii) Indique las condiciones que tienen que cumplir a y b para que Q esté situado por debajo del eje x. [1]

(h) Pruebe que si $4a^3b + 27b^2 < 0$, en ese caso la curva $y = x^3 + ax^2 + b$ tiene exactamente tres intersecciones con el eje x. [5]

2. [Puntuación máxima: 31]

En esta pregunta vamos a empezar pidiéndole que examine unas familias de curvas que cortan en ángulo recto a todos los miembros de otra familia de curvas. A continuación tendrá que examinar una familia de curvas que corta en ángulo agudo (α) a todos los miembros de otra familia de curvas.

(a) Considere una familia de rectas L cuya ecuación es $y = mx$, donde m es un parámetro. Todos los miembros de L cortan en ángulo recto a cada uno de los miembros de una familia de curvas C.

Nota: En los apartados (i), (ii) y (iii) no es necesario que considere el caso en el que $x = 0$.

(i) Escriba una expresión para la pendiente de L en función de x e y. [1]

(ii) A partir de lo anterior, muestre que la pendiente de C viene dada por $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$. [1]

(iii) Resolviendo la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$, muestre que la familia de curvas C tiene por ecuación $x^2 + y^2 = k$ donde k es un parámetro. [2]

Una familia de curvas tiene por ecuación $y^2 = 4a^2 - 4ax$ donde a es un parámetro real y positivo.

Una segunda familia de curvas tiene por ecuación $y^2 = 4b^2 + 4bx$ donde b es un parámetro real y positivo.

(b) Considere el caso en el que $a = 2$ y $b = 1$. En los mismos ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente las curvas $y^2 = 16 - 8x$ e $y^2 = 4 + 4x$, rotulando claramente cada curva y todas las intersecciones con el eje x que haya.

Nota: No es necesario que halle las coordenadas de ninguno de los puntos de intersección de las dos curvas. [3]

(c) Resolviendo el sistema de ecuaciones $y^2 = 4a^2 - 4ax$ e $y^2 = 4b^2 + 4bx$, muestre que estas curvas se cortan en los puntos $\mathrm{M}\left(a-b,\, 2\sqrt{ab}\right)$ y $\mathrm{N}\left(a-b,\, -2\sqrt{ab}\right)$. [6]

(d) En el punto M, muestre que las curvas $y^2 = 4a^2 - 4ax$ y $y^2 = 4b^2 + 4bx$ se cortan en ángulo recto. [5]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Considere dos familias de curvas F y G.

A la pendiente de F la denominaremos $f(x, y)$.

A la pendiente de G la denominaremos $g(x, y)$.

Todos los miembros de F cortan a cada uno de los miembros de G en un ángulo agudo α.

Se puede mostrar que

$$g(x, y) = \frac{f(x, y) + \tan\alpha}{1 - f(x, y)\tan\alpha}.$$

En el apartado (e), considere el caso concreto en el que $f(x, y) = -\frac{x}{y}$, para $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(e) (i) Muestre que $g(x, y) = \frac{y - x}{y + x}$. [2]

(ii) A partir de lo anterior y resolviendo la ecuación diferencial homogénea $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y - x}{y + x}$, halle una ecuación general que represente a esta familia de curvas G. Dé la respuesta en la forma $h(x, y) = d$ donde d es un parámetro. [9]

(f) Teniendo presente el $\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \tan\alpha$, muestre que, para todo $f(x, y)$ finito,

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} g(x, y) = -\frac{1}{f(x, y)}.$$ [2]